Zur Verteilung der quadratfreien Ideale in quadratischen Zahlkörpern

Nowak, Werner Georg

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 39, 1987, S.31-36

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur Verteilung der quadratfreien Ideale in quadratischen Zahlkörpern

Von **Werner Georg Nowak,** Wien

Vorgelegt von Hans-Joachim Kanold

(Eingegangen am 13. 3. 1987)

1. Einleitung

In der klassischen elementaren Zahlentheorie ist für die Anzahl $Q(x)$ der quadratfreien natürlichen Zahlen $\leq x$ die asymptotische Formel

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(x^{1/2})$$

wohlbekannt (vgl. z.B. [4], S. 83). Mit Hilfe der Theorie der Exponentialsummen läßt sich diese Abschätzung zu

$$(1) \qquad Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(x^{1/2} \exp(-C(\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5}))$$

verschärfen (siehe A. Walfisz [11], S. 192). Weitere Verbesserungen sind unter Annahme der Riemannschen Vermutung möglich; das schärfste Resultat in dieser Richtung lautet

$$(2) \qquad Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(x^{7/22+\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0)$$

(R.C. Baker und J. Pintz [2]).

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das analoge Problem für (ganze) Ideale $\mathfrak{J} \neq (0)$ eines quadratischen Zahlkörpers K über $\mathbb{Q}$. Ein Ideal $\mathfrak{J}$ heißt bekanntlich quadratfrei, wenn kein Primideal $\mathfrak{P}$ existiert, für das $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{P}^2$ teilbar ist. Es bezeichne $Q_K(x)$ die Anzahl der quadratfreien Ideale $\mathfrak{J}$ von K mit Norm $N(\mathfrak{J}) \leq x$. Unser Ziel sind asymptotische Formeln analog zu (1) und (2).

Dabei legen wir zunächst Wert auf die „Gleichmäßigkeit" der Abschätzung in der Diskriminante d von K (eine Fragestellung, die sich im klassischen Fall natürlich nicht ergibt).

Satz 1. *Für alle quadratischen Zahlkörper K über $\mathbb{Q}$ mit $|d| \leq (\log x)^a$ ($a \in \mathbb{R}^+$ beliebig) gilt*

$$Q_K(x) = \frac{\varrho}{\zeta_K(2)} x + O(x^{1/2} \exp(-c(\log x)^{1/2})),$$

wobei ϱ das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ in $s=1$ bezeichnet und $c \in \mathbb{R}^+$ sowie die O-Konstante nur von a abhängen.

Für einen fest gewählten Körper K ist eine leichte Verbesserung wie in (1) möglich.

Satz 2. *Für jeden quadratischen Zahlkörper K über $\mathbb{Q}$ gilt*

$$Q_K(x) = \frac{\varrho}{\zeta_K(2)} x + O(x^{1/2} \exp(-c' (\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5})),$$

wobei $c' \in \mathbb{R}^+$ und die O-Konstante von K abhängen.

Unter Annahme der Riemannschen Vermutung für $\zeta_K(s)$ läßt sich schließlich eine weitere Verschärfung in Analogie zu (2) erzielen.

Satz 3. *Falls die Dedekindsche Zetafunktion $\zeta_K(s)$ in der Halbebene* $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ *keine Nullstelle besitzt, gilt (für jedes $\varepsilon > 0$)*

$$Q_K(x) = \frac{\varrho}{\zeta_K(2)} x + O(x^{290/731 + \varepsilon}),$$

wobei die O-Konstante von K und von ε abhängt.

2. Einige Hilfssätze

Lemma 1. *Es sei $A_K(u)$ die Anzahl der (ganzen) Ideale $\mathfrak{J}$ des quadratischen Zahlkörpers K mit Norm $N(\mathfrak{J}) \leq u$. Dann gilt (für jedes $\varepsilon > 0$)*

(3) $\quad A_K(u) = \varrho u + O(u^{139/429 + \varepsilon}),$

wobei die O-Konstante von K und ε abhängt. Weiters gilt

(4) $\quad A_K(u) = \varrho u + O((|d| u)^{1/3 + \varepsilon}) + O(|d|^{1/2 + \varepsilon} u^{\varepsilon}),$

wobei d die Diskriminante von K bezeichnet, und die O-Konstanten nur von $\varepsilon > 0$, aber nicht von K abhängen.

Beweis. Wegen der Produktdarstellung

(5) $\quad \zeta_K(s) = \zeta(s)\ L\ (s, \chi)$

(vgl. z.B. H. Cohn [3], S. 134), in der χ einen reellen primitiven Charakter modulo d bezeichnet, kann die Auswertung von $A_K(u)$ auf Teilerprobleme in Restklassen modulo $|d|$ zurückgeführt werden. Das Ergebnis (3) folgt dann (wie in [8] im Detail ausgeführt) aus einem tiefen Satz von G. A. Kolesnik [5]. Die Abschätzung (4) stammt schließlich von R. G. Ayoub [1]. (Der dort gegebene Beweis gilt offensichtlich auch für reelle quadratische Zahlkörper.)

Lemma 2. *Es bezeichne $\mu_K(\mathfrak{J})$ die zum quadratischen Zahlkörper K gehörige Möbiussche Funktion (vgl. z. B. [7], S. 295, für ihre Definition und elementaren Eigenschaften). Dann gilt*

(6) $\quad M_K(t) := \sum\limits_{N(\mathfrak{J}) \leq t} \mu_K(\mathfrak{J}) = O(t \exp(-c_0' (\log t)^{3/5} (\log\log t^{-1/5})),$

wobei $c_0' \in \mathbb{R}^+$ und die O-Konstante von K abhängen. Für alle quadratischen Körper K mit $|d| \leq (\log t)^b$ ($b \in \mathbb{R}^+$ beliebig) gilt gleichmäßig

(7) $\quad M_K(t) = O(t \exp(-c_0(\log t)^{1/2})),$

wobei $c_0 \in \mathbb{R}^+$ und die O-Konstante nur von b abhängen.

Beweis. Zur Abkürzung sei $\delta_j(w) := \exp(-c_j(\log w)^{1/2})$ mit passenden positiven Konstanten c_j, $j = 0,1,2,\ldots$ Dann gilt bekanntlich (z.B. K. Prachar [9], S. 71) für die klassische μ-Funktion

(8) $$M(w) := \sum_{n \leq w} \mu(n) = O(w\delta_1(w)),$$

und für jeden reellen primitiven Charakter χ zu einem Modul $|d| \leq (\log w)^{b'}$

(9) $$M_\chi(w) := \sum_{m \leq w} \mu(m)\chi(m) = O(w\,\delta_2(w)),$$

wobei c_2 und die O-Konstante nur von $b' \in \mathbb{R}^+$ abhängen. (Diese Abschätzung folgt nach dem klassischen Muster von [9], S. 71, Satz 5.1., unter Verwendung der Schranken für $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ aus [9], S. 131, Satz 7.1. sowie des Resultats von Siegel über die „Ausnahmenullstelle" in [9], S. 144.)

Nach (5) gilt nun (für Re $s>1$)

(10) $$(\zeta_K(s))^{-1} = \sum_{\mathfrak{J}} \mu_K(\mathfrak{J})N(\mathfrak{J})^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\chi(m)m^{-s},$$

daraus folgt nach der „Hyperbelmethode" mittels (8) und (9)

$$\begin{aligned}
M_K(t) &= \sum_{nm \leq t} \mu(n)\mu(m)\chi(m) = \\
&= \sum_{n \leq \sqrt{t}} \mu(n)M_\chi(\tfrac{t}{n}) + \sum_{m \leq \sqrt{t}} \mu(m)\chi(m)M(\tfrac{t}{m}) - M(\sqrt{t})M_\chi(\sqrt{t}) = \\
&= O\Big(\sum_{n \leq \sqrt{t}} \frac{t}{n}(\delta_2(\sqrt{t}) + \delta_1(\sqrt{t}))\Big) + O(t\,\delta_1(\sqrt{t})\,\delta_2(\sqrt{t})) = O(t\,\delta_0(t))
\end{aligned}$$

(für passendes $c_0 > 0$), die Behauptung (7) des Lemmas. Genauso beweist man (6), indem man (8) und (9) durch

(11) $\quad \max(|M(w)|, |M_\chi(w)|) = O(w \exp(-c_1'(\log w)^{3/5} (\log\log w)^{-1/5}))$

ersetzt, wobei $c_1' > 0$ und die O-Konstante jetzt von χ, also von K abhängen. (Zum Beweis von (11) vgl. man das Buch [11] von A. Walfisz, insbesondere S. 191 und die entsprechenden Resultate über $L(s,\chi)$ in Kap. V.)

Lemma 3. *Für einen reellen Parameter y sei*

$$f_y(s) := (\zeta_K(s))^{-1} - \sum_{N(\mathfrak{J}) \leq y} \mu_K(\mathfrak{J})N(\mathfrak{J})^{-s}$$

definiert. Unter Annahme der Riemannschen Vermutung für $\zeta_K(s)$ gilt dann

$$f_y(\sigma+it)=O(y^{1/2-\sigma+\varepsilon}(|t|^{\varepsilon}+1))$$

für $\sigma\geq\frac{1}{2}+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$.

Beweis. Dieses Resultat wurde für $\zeta(s)$ von H.L. Montgomery und R.C. Vaughan [6] formuliert. Es folgt aus dem Argument in [10], S. 315, indem man die Abschätzung

$$(\zeta_K(s+w))^{-1}=O(|\mathrm{Im}\,s|^{\varepsilon}+|\mathrm{Im}\,w|^{\varepsilon}+1)$$

beachtet (die unter der Riemannschen Vermutung für $\zeta_K(s)$ in Re $(s+w)\geq\frac{1}{2}+\varepsilon$ gilt, vgl. [10], S. 283) und den Parameter T dort genügend groß wählt.

3. Beweis von Satz 1

Es sei x ein großer reeller Parameter, K ein quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante d, $|d|\leq(\log x)^a$, und $y=y(x)=x^{1/2}\,\delta_3(x)$ definiert (mit passend kleinem $c_3>0$); alle Konstanten hängen in der Folge höchstens von a ab.

Aus den elementaren Eigenschaften der Funktion $\mu_K(\mathfrak{J})$ folgt

$$Q_K(x)=\sum_{N(\mathfrak{J})\leq x}\ \sum_{\mathfrak{J}^2|\mathfrak{J}}\mu_K(\mathfrak{J})=\sum_{\substack{N(\mathfrak{J})^2N(\mathfrak{J}')\leq x\\ N(\mathfrak{J})\leq y}}\mu_K(\mathfrak{J})+\sum_{\substack{N(\mathfrak{J})^2N(\mathfrak{J}')\leq x\\ N(\mathfrak{J})>y}}\mu_K(\mathfrak{J})=:S_1+S_2. \tag{12}$$

Nach Lemma 1, Formel (4), erhalten wir

$$\begin{aligned}S_1&=\sum_{N(\mathfrak{J})\leq y}\mu_K(\mathfrak{J})A(xN(\mathfrak{J})^{-2})=\\ &=\sum_{N(\mathfrak{J})\leq y}\mu_K(\mathfrak{J})\,(\varrho xN(\mathfrak{J})^{-2}+O((\log x)^a x^{1/3+\varepsilon}N(\mathfrak{J})^{-2/3-2\varepsilon}))=\\ &=\varrho x\sum_{N(\mathfrak{J})\leq y}\mu_K(\mathfrak{J})N(\mathfrak{J})^{-2}+O(x^{1/3+\varepsilon}y^{1/3-2\varepsilon}(\log x)^a).\end{aligned}$$

Partielle Summation ergibt aus (7)

$$\sum_{N(\mathfrak{J})>y}\mu_K(\mathfrak{J})N(\mathfrak{J})^{-2}=\int_{y+}^{\infty}t^{-2}dM_K(t)=-y^{-2}M_K(y)+2\int_{y}^{\infty}t^{-3}M_K(t)\,dt=O(y^{-1}\delta(x)),$$

außerdem gilt bekanntlich $\varrho=L(1,\chi)=O(|d|)=O((\log x)^a)$, daher folgt insgesamt

$$S_1=\frac{\varrho}{\zeta_K(2)}x+O(x^{1/2}\delta_5(x)). \tag{13}$$

Andererseits erhält man aus Lemma 2, Formel (7),

$$\begin{aligned}S_2&=\sum_{N(\mathfrak{J}')\leq xy^{-2}}(M_K(x^{1/2}N(\mathfrak{J}')^{-1/2})-M_K(y))=\\ &=\sum_{N(\mathfrak{J}')\leq xy^{-2}}O(x^{1/2}N(\mathfrak{J}')^{-1/2}\delta_6(x))=O(x^{1/2}\delta_7(x)).\end{aligned}$$

Zusammen mit (13) vervollständigt dies den Beweis von Satz 1.

4. Beweisskizze von Satz 2

Das Argument verläuft wörtlich analog, indem man die Faktoren $\delta_j(x)$ überall durch $\delta_j^*(x) := \exp(-c_j' (\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5})$ $(c_j' \in \mathbb{R}^+)$ ersetzt und von der Abschätzung (6) anstelle von (7) ausgeht. Die Konstanten hängen dann von $|d|$, also vom Körper K ab.

5. Beweis von Satz 3

Wir nehmen wieder eine Aufspaltung der Form (12) vor, wobei jetzt allerdings $y = y(x) = x^{151/731}$ gewählt wird. (Alle O-Konstanten dürfen von K abhängen.) Aus Lemma 1, Formel (3), erhalten wir (mit $\varkappa := \frac{139}{429}$)

$$S_1 = \sum_{N(\mathfrak{J}) \le y} \mu_K(\mathfrak{J}) A(x N(\mathfrak{J})^{-2}) = \sum_{N(\mathfrak{J}) \le y} \mu_K(\mathfrak{J}) (\varrho x N(\mathfrak{J})^{-2} + \tag{14}$$

$$+ O(x^{\varkappa+\varepsilon} N(\mathfrak{J})^{-2\varkappa-2\varepsilon})) = \varrho x \sum_{N(\mathfrak{J}) \le y} \mu_K(\mathfrak{J}) N(\mathfrak{J})^{-2} + O(x^{\varkappa+\varepsilon} y^{1-2\varkappa}).$$

Die Summe S_2 wird nun nicht durch elementare Faltung, sondern einen Kunstgriff von Montgomery und Vaughan [6] abgeschätzt, der auf komplexer Integration und Lemma 3 beruht. Nach der Perron'schen Formel mit Restglied (z.B. [9], S. 376) gilt (für $x - \frac{1}{2}$ ganz, o.B.d.A.)

$$S_2 = (2\pi i)^{-1} \int_{2-iT}^{2+iT} f_y(2s) \zeta_K(s) \frac{x^s}{s} ds + O(x^2 T^{-1}). \tag{15}$$

Wir verschieben nun den Integrationsweg auf die Gerade $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Nach einem klassischen Argument (vgl. [10], S. 282) impliziert die Riemannsche Vermutung für $\zeta_K(s)$ die Gültigkeit der Lindelöf'schen Vermutung. Zusammen mit Lemma 3 folgt daraus

$$f_y(2s)\zeta_K(s) = O(y^{-1/2} (|t|^\varepsilon + 1))$$

gleichmäßig in $\sigma \ge \frac{1}{2} + \varepsilon$ $(s = \sigma + it)$. Nach dem Residuensatz und einer trivialen Abschätzung der drei Restintegrale erhalten wir daher aus (15)

$$S_2 = \varrho f_y(2) x + O(x^{1/2+\varepsilon} y^{-1/2})$$

(mit neuem $\varepsilon > 0$), wenn $T = T(x)$ genügend groß gewählt wird. Zusammen mit (14) und (12) beweist dies Satz 3, indem man die Definitionen von $\varkappa, y$ und $f_y(s)$ einsetzt.

Zusatz bei der Korrektur: In neuester Zeit haben H. Iwaniec und C. J. Mozzochi die Abschätzung beim Kreis- und Teilerproblem zu $O(u^{7/22+\varepsilon})$ verschärft; analog läßt sich (3) verbessern. Dies ergibt dann in Satz 3 das Restglied $O(x^{15/38+\varepsilon})$.

Literatur

[1] R. G. AYOUB: On the coefficients of the zeta function of an imaginary quadratic field. Acta arithm. **13** (1968), 375–381.

[2] R.C. BAKER und J. PINTZ: The distribution of square-free numbers. Acta arithm. **46** (1985), 73–79.
[3] H. COHN: A classical invitation to algebraic numbers and class fields, New York – Heidelberg – Berlin 1978.
[4] E. HLAWKA, J. SCHOISSENGEIER und R. TASCHNER: Geometrische und analytische Zahlentheorie, Wien 1986.
[5] G.A. KOLESNIK: On the method of exponent pairs. Acta arithm. **45** (1985), 115–143.
[6] H.L. MONTGOMERY und R.C. VAUGHAN: The distribution of squarefree numbers. In: Recent progress in analytic number theory (Proceedings Durham Symp. 1979), vol. I, London 1981, 247–256.
[7] W. NARKIEWICZ: Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Warschau 1974.
[8] W.G. NOWAK: Zum Kreisproblem. Sitz.-Ber. Österr. Akad. Wiss., Abt. II, math.-naturwiss. Kl., **194** (1985), 265–271.
[9] K. PRACHAR: Primzahlverteilung, Berlin – Heidelberg – New York 1957.
[10] E.C. TITCHMARSH: The theory of the Riemann zeta-function, Oxford 1951.
[11] W. WALFISZ: Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Berlin 1963.